

### РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу.  
Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1.  $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$ ,  $x^2 - 2x + 1 = y^2$ ,  $y^2 = (x - 1)^2$  (10 бодова). Како су  $x$  и  $y$  природни бројеви, то је  $y = x - 1$  (5 бодова). Сада је  $(y - x)^{2013} = (x - 1 - x)^{2013} = -1$  (5 бодова).

2. (МЛ47/3) Правилни осмоугао се састоји од четири

подударна делтоида, па је  $P_8 = 4P_d = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} = 2d_1 d_2$ , где

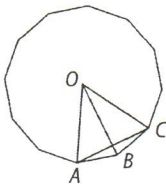
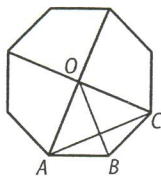
су  $d_1$  и  $d_2$  дијагонале делтоида. Једна дијагонала једнака је полупречнику описане кружнице око осмоугла,  $d_1 = OB = r$ , а друга  $d_2 = AC = r\sqrt{2}$ .  $P_8 = 2d_1 d_2 = 2 \cdot r \cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2$  (8

бодова). Слично, површина правилног дванаестугла је

$P_{12} = 6P_d = 6 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} = 3d_1 d_2$ ,  $d_1 = r$ ,  $d_2 = r$ .  $P_{12} = 3d_1 d_2 = 3r \cdot r =$

$3r^2$  (8 бодова). Однос површина ових многоуглова је

$$P_8 : P_{12} = \frac{2\sqrt{2}r^2}{3r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad P_8 : P_{12} = 2\sqrt{2} : 3 \quad (4 \text{ бода}).$$



3.  $\frac{3n^2 + 15}{n+2} = \frac{3n^2 - 12 + 27}{n+2} = \frac{3(n-2)(n+2)}{n+2} + \frac{27}{n+2} = 3(n-2) + \frac{27}{n+2}$  (12 бодова).

Вредност почетног разломка је цео број када је  $\frac{27}{n+2}$  цео број. Дакле,  $n+2 \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$ , па је  $n \in \{-29, -11, -5, -3, -1, 1, 7, 25\}$  (свако решење по 1 бод).

4. Постоје два тражена многоугла.

1) Нека је  $AB = AK$  и  $BK = KC$  (види слику). Означимо углове као на слици. Како је  $\angle BAC = \angle BCA$  то је  $180^\circ - 4x = x$ , па је  $x = 36^\circ$ . Дакле, унутрашњи угао је  $3x = 108^\circ$ , па је реч о правилном петоуглу (14 бодова).

2) Ако је  $AK = BK$  и  $CK = KB$  тада је  $\angle ABC = 90^\circ$ , па је тражени многоугао квадрат (6 бодова).



5. Милашин. Првим потезом Милашин износи 3 сулундара. У даљем току игре, Милашин увек износи по 2 сулундара. На тај начин после сваког његовог потеза број сулундара је дељив са 3, док после сваког Радашиновог потеза број преосталих сулундара при дељењу са 3 даје остатак 2. Јасно је онда да ће последњи сулундар изнети Милашин (20 бодова).